

从单幅正轴测投影线图建立平面立体的模型

储 珺^{1),2)} 高满屯²⁾ 陈国定²⁾

¹⁾(南昌航空工业学院土木建筑系, 南昌 330034) ²⁾(西北工业大学机电工程学院, 西安 710072)

摘 要 提出了一种从单幅二维正轴测投影线图建立平面立体线框模型的新方法。提出一种新的空间直线坐标表示法,根据正轴测投影线图中隐含的直线与平面之间的从属关系建立约束方程。考虑画出隐藏线的正轴测投影线图,根据线画图图中隐含的约束条件,建立一个线性系统,通过求解该线性系统,得到平面立体的三维信息。证明解释平面立体正轴测投影线图至少有4个自由度。

关键词 三维重构 线图 轴测图 平面立体

中图法分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2004)08-0972-06

Creating Model of Planar Body from Line Drawing under Orthographically Axonometric Projection

CHU Jun^{1),2)}, GAO Man-tun²⁾, CHEN Guo-ding²⁾

¹⁾(Department of Architecture and Civil Engineering, Nanchang Institute of Aeronautical Technology, Nanchang 330034)

²⁾(Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract In this paper, a new approach is proposed for reconstruction a three-dimensional planar object from its single line drawing depicting it under orthographically axonometric projection. The line drawing is supposed to be a hidden-drawn one. A new method with uniqueness for representing lines in two-dimensional projective plane and three-dimensional space is introduced. The coordinates relations between a line in three-dimension and its orthographically axonometric projection line in two-dimensional plane are put forward. It is also provided the coordinates relations when two lines are intersecting. On the basis of these coordinates relations, some new constraints about lines and planes have been proposed, and a linear system based on these constraints is established. The three-dimensional information of a planar body can be obtained by solving the linear system from its orthographically axonometric projection. It is proved also that, in the interpretation of line drawing of a planar object under orthographically axonometric projection, there exist at least four degrees of freedom, the three of which are used to determine the location of the planar object, whereas the last one of which is used to determine its pose.

Keywords 3D reconstruction, line drawing, axonometric projection, planar object

1 引 言

立体线图一直是人们之间以及人与计算机之间交换三维物体(或景物)信息的一种重要媒介,线图的计算机解释是计算机视觉系统及智能CAD系统研制中的一个重要问题。在智能CAD系统中,图形信息输入一直是人们关心的问题之一,最常用的一

种输入方法就是通过输入、解释二维投影线图以获取物体三维信息。从二维线图恢复三维结构是投影的一个逆过程,在投影过程中物体失去了深度信息。人类理解一幅线图或场景的投影图则非常简单,这是因为在二维线图中仍然存在着一些三维的信息,如直线与直线相交,直线在平面上等一些约束关系。人们根据在视觉实践中得到的一些先验知识,利用这些约束关系可以恢复三维结构,但使用计算机从

基金项目:江西省自然科学基金项目(0311018);陕西省自然科学基金项目(2002E224);南昌航空工业学院测试技术与控制工程研究中心基金项目(2003-013)

收稿日期:2003-01-23;改回日期:2004-04-13

二维线图恢复物体的三维信息并不容易。在图像处理中,提取特征点比提取特征直线的准确性差,因此本文提出一种基于直线与平面的相对位置关系从单幅二维正轴测投影线图建立平面立体线框模型的新方法。

线图解释包括线图的标记^[1~3]、线图中面的确定^[4,5]和线图所对应的物体三维结构的恢复^[3,6~10]。Sugihara^[5]用代数方法给出了二维线图具有三维意义的充分必要条件。但 Sugihara 的算法对线图的解释仅基于物体上的点与平面之间的关系,而在实际问题中,由于环境中噪声的干扰,所输入的线图都不可避免地存在误差,Sugihara 的算法对有误差的线图会给出对应的平面立体不存在的结果,但人类视觉却能接受这些线图,并能感知出它们所表示的平面立体。优化是一种恢复线图三维结构的常用方法^[6~8]。根据线图中的一些规则,如线的平行性、面为平面、斜对称、垂直角点等建立目标函数。但这些方法存在两个问题:一是目标函数是非线性的,初值选取不当会导致收敛慢或不收敛,或者陷入局部优化,得到局部最优解;二是图像中规则的权数的选择比较困难。上面的线图解释方法是基于点与平面的相对位置关系的。

曲^[9,10]提出了基于直线的平面立体线图解释理论和方法。定义由 6 个数组成的拼 6 小组 (l, m, n, p, q, r) (前 3 个数不全为零) 为空间直线的坐标,其中前 3 个数 (l, m, n) 为直线的方向向量,后 3 个数 (p, q, r) 为直线关于原点的距向量(作用点在该直线上)。根据线图中隐含的约束关系恢复平面立体的三维信息。但这种表示直线的方法不具有唯一性,用此方法恢复的平面立体三维信息中空间直线坐标包含有比例因子,给计算带来了不便。

2 直线的坐标

2.1 基本假设与坐标系

为使解释的立体真正为平面立体,线图为真正的正轴测投影线图(可以有误差但必须是正轴测图),需要以下一些基本假设。

(1) 直线在投影面上的投影不能是点,即物体上的直线不能垂直于投影面。

(2) 平面在投影面上的投影不能是直线,即物体上的平面不能垂直于投影面。

(3) 两条直线在投影面上的投影不能重合或部

分重合,即一条直线的投影或部分投影不能落在另一条直线的投影上。

设图像平面坐标系为 oxy , 空间坐标系为 $oXYZ$, S 为投影方向, x, y 轴分别与 X, Y 轴重合, 考虑画出隐藏线的正轴测投影线图。

2.2 平面上直线的坐标

图像平面上的直线方程可写为

$$x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - \rho = 0$$

其中, ρ, θ 的几何意义如图 1 所示。规定 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ 。这种表示平面上直线的方法具有唯一性,即图像平面上任意一条直线都有唯一对应的 (ρ, θ) 且满足 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$, 任意满足 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ 的 2 个数 (ρ, θ) 确定了图像平面上唯一一条与 (ρ, θ) 对应的直线。因此可以定义不全为零的 2 个数 $((\rho, \theta))$ 为图像平面上直线的坐标。

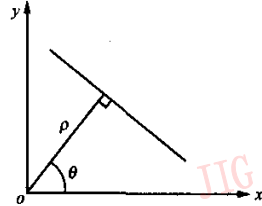


图 1 平面上的直线表示

2.3 空间中直线的坐标

空间任意一条直线 L 可以看成是某两个相交平面 P_1 和 P_2 的交线, 则空间中直线可以表示为

$$\begin{cases} A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1 = 0 \\ A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2 = 0 \end{cases}$$

为了使三维模型和二维投影之间产生联系, P_1 平面包含空间直线的二维正轴测投影且平行于投影方向, P_2 与平面 P_1 垂直, P_1 与 P_2 平面在空间直线 L 处相交, 如图 2 所示。

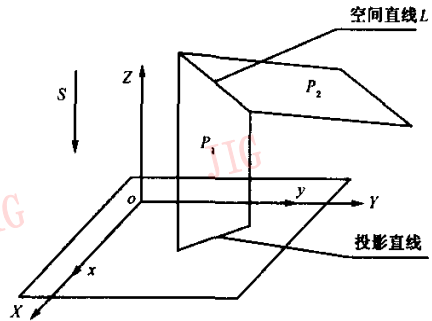


图 2 空间中直线的表示

依据假设 1, P_2 平面不能平行于投影方向 S , 则

空间直线的方程可写为

$$\begin{cases} X\cos(\theta) + Y\sin(\theta) - \rho = 0 \\ -bX\sin(\theta) + bY\cos(\theta) + Z\cos(\theta) + c\cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

这种表示空间中直线的方法具有唯一性,即空间中任意一条直线都有唯一对应的 (ρ, θ, b, c) , (ρ, θ, b, c) 确定了空间中唯一对应的直线,因此可以定义不全为零的 4 个数 (ρ, θ, b, c) 为空间中直线的坐标。

空间直线方程的齐次坐标形式为

$$\begin{cases} X_1\cos(\theta) + X_2\sin(\theta) - X_4\rho = 0 \\ -bX_1\sin(\theta) + bX_2\cos(\theta) + X_3\cos(\theta) + X_4c\cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

3 线图的自由度

设一幅线图的平面结构为 $G(J, U, E)$,其中 J 是线图中直线段的集合, U 是从 J 到 R^3 的映射, $U(s)$ 表示 $s \in J$ 的位置即直线 s 的坐标, E 是有序的一对 J 的元素的集合, E 的元素 (s, t) 表示直线段 s 和直线段 t 仅相交于它们的端点。从线图的平面结构 $G(J, U, E)$,可以推理获得线图对应的平面立体的空间结构 $S=(L, F, R_1, R_2, \dots)$,其中 L 是物体上直线段的集合,它的元素为空间直线的坐标 (ρ, θ, b, c) ; (ρ, θ) 是从线图中提取的已知数;而 (b, c) 为待求的未知数。 F 是平面立体上表面的集合。 R_1 是平面立体中交于顶点的两条直线的有序对集合, R_1 可以从 G 的元素 E 导出。 R_2 为一个有序的二元关系, R_2 的元素 $R_2(s, f)$ ($s \in L, f \in F$)表示直线 s 位于平面 f 上。

定理 G 是一幅标记的正轴测投影线图的平面结构, S 是它对应的平面立体的空间结构,则解释由 G 和 S 表示的平面立体正轴测投影线图至少有 4 个自由度。

证明 设 G 是一幅标记的正轴测投影线图的平面结构, S 是它对应的平面立体的空间结构。设 p 为由 G 和 S 表示的平面立体上任一直线上的任一点,其坐标为 $p(X, Y, Z)$, $p'(X', Y', Z')$ 为平面立体经下列三维射影变换后 p 的对应点。

$$\begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \\ X'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

代入空间直线的齐次方程得

$$\begin{cases} \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0 \\ \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 = 0 \end{cases}$$

其中,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r_{11}\cos(\theta) + r_{12}\sin(\theta) - \rho r_{41} \\ \alpha_2 &= r_{12}\cos(\theta) + r_{22}\sin(\theta) - \rho r_{42} \\ \alpha_3 &= r_{13}\cos(\theta) + r_{23}\sin(\theta) - \rho r_{43} \\ \alpha_4 &= r_{14}\cos(\theta) + r_{24}\sin(\theta) - \rho r_{44} \\ \beta_1 &= -r_{11}b\sin(\theta) + r_{21}b\cos(\theta) + r_{31}\cos(\theta) + r_{41}c\cos(\theta) \\ \beta_2 &= -r_{12}b\sin(\theta) + r_{22}b\cos(\theta) + r_{32}\cos(\theta) + r_{42}c\cos(\theta) \\ \beta_3 &= -r_{13}b\sin(\theta) + r_{23}b\cos(\theta) + r_{33}\cos(\theta) + r_{43}c\cos(\theta) \\ \beta_4 &= -r_{14}b\sin(\theta) + r_{24}b\cos(\theta) + r_{34}\cos(\theta) + r_{44}c\cos(\theta) \end{aligned}$$

为使变换前直线的投影与变换后直线的投影一致,必有

$$\begin{cases} r_{11}\cos(\theta) + r_{21}\sin(\theta) - \rho r_{41} = \cos(\theta) \\ r_{12}\cos(\theta) + r_{22}\sin(\theta) - \rho r_{42} = \sin(\theta) \\ r_{13}\cos(\theta) + r_{23}\sin(\theta) - \rho r_{43} = 0 \\ r_{14}\cos(\theta) + r_{24}\sin(\theta) - \rho r_{44} = -\rho \end{cases}$$

对任意的 (ρ, θ) 都成立,因而有

$$\begin{aligned} r_{12} &= r_{13} = r_{14} = r_{21} = r_{23} = r_{24} = r_{41} = r_{42} = r_{43} = 0, \\ r_{11} &= r_{22} = r_{44} = 1 \end{aligned}$$

在上述变换矩阵中有 4 个独立的参数 $r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{34}$,因此解释由平面结构 G 和空间结构 S 表示的平面立体正轴测投影线图至少有 4 个自由度。

4 线图约束关系

4.1 空间两直线相交的约束关系

设空间两直线分别为 K_i 和 K_j ,其正轴测投影为 k_i 和 k_j ,若两直线 K_i 和 K_j 在空间相交,下列线性齐次方程组必有非零解

$$\begin{cases} X_1\cos(\theta_i) + X_2\sin(\theta_i) + X_4\rho_i = 0 \\ -b_iX_1\sin(\theta_i) + b_iX_2\cos(\theta_i) + X_3\cos(\theta_i) + X_4c_i\cos(\theta_i) = 0 \\ X_1\cos(\theta_j) + X_2\sin(\theta_j) - X_4\rho_j = 0 \\ -X_1b_j\sin(\theta_j) + X_2b_j\cos(\theta_j) + X_3\cos(\theta_j) + X_4c_j\cos(\theta_j) = 0 \end{cases}$$

则

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) & 0 & -\rho_i \\ -b_i\sin(\theta_i) & b_i\cos(\theta_i) & \cos(\theta_i) & c_i\cos(\theta_i) \\ \cos(\theta_j) & \sin(\theta_j) & 0 & -\rho_j \\ -b_j\sin(\theta_j) & b_j\cos(\theta_j) & \cos(\theta_j) & c_j\cos(\theta_j) \end{vmatrix} = 0$$

据此可得约束关系式

$$n_1b_i + n_2b_j + n_3c_i + n_4c_j = 0 \quad (1)$$

其中,

$$n_1 = -\rho_j \cos(\theta_j) + \rho_i \sin(\theta_j) \sin(\theta_i) \cos(\theta_j) + \rho_i \cos(\theta_i) \cos^2 \theta_j,$$

$$n_2 = \rho_j \sin(\theta_i) \cos(\theta_i) \sin(\theta_j) + \rho_j \cos^2(\theta_i) \cos(\theta_j) - \rho_i \cos(\theta_i),$$

$$n_3 = -\cos^2(\theta_i) \sin(\theta_j) \cos(\theta_j) + \cos(\theta_i) \sin(\theta_i) \cos^2(\theta_j),$$

$$n_4 = \cos^2(\theta_i) \sin(\theta_j) \cos(\theta_j) - \sin(\theta_i) \cos^2(\theta_j) \cos(\theta_i).$$

4.2 直线在平面上的约束关系

4.2.1 平面的坐标

平面立体上平面的一般方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

根据假设 2,该平面不能平行于投影方向 S ,则必有 $C \neq 0$,因此该平面的方程可写成下面的形式

$$AX + BY + Z + C = 0$$

本文采用这种形式表示平面,称参数 A_i, B_i, C_i 为平面的结构参数,一般也可把这 3 个数组成得数组 (A_i, B_i, C_i) 称为平面的坐标.

4.2.2 直线位于平面上的约束关系

设平面 f_i 的坐标为 (A_i, B_i, C_i) ,直线 K_j 的坐标为 $(\rho_j, \theta_j, b_j, c_j)$,如果直线上 K_j 有两点 p_1, p_2 位于平面上,则直线位于平面上.令 p_1, p_2 的坐标分别为

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = \rho_j / \sin(\theta_j) \\ Z = -(c_j \sin(\theta_j) + b_j \rho_j) / \sin(\theta_j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \rho_j / \cos(\theta_j) \\ Y = 0 \\ Z = (\rho_j b_j \sin(\theta_j) - c_j \cos^2(\theta_j)) / \cos^2(\theta_j) \end{cases}$$

则直线 K_j 位于平面上需满足下列条件

$$\begin{cases} \rho_j B_i - c_j \sin(\theta_j) - \rho_j b_j + C_i \sin(\theta_j) = 0 \\ A_i \rho_j \cos(\theta_j) + C_i \cos^2(\theta_j) - \\ c_j \cos^2(\theta_j) + b_j \rho_j \sin(\theta_j) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

根据约束条件式(1),式(2)可得一个线性系统

$$MW = 0$$

假设线图中有 m 条直线和 n 个平面,则线图中的直线和平面分别产生 $2m$ 个未知数 $(b_1, c_1, b_2, c_2, \dots, b_m, c_m)$ 和有 $3n$ 个未知数 $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \dots, A_n, B_n, C_n)$.因此该线性系统中

$$W = (b_1, c_1, b_2, c_2, \dots, b_m, c_m, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \dots, A_n, B_n, C_n)^T$$

M 是一个大小为 $(|R_1| + 2|R_2|) \times (2m + 3n)$ 由投影直线的坐标组成的常数矩阵.

线图自由度为 4,可以先确定 4 个空间直线的参数或平面的参数,用最小二乘法解该线性系统即可得到平面立体上空间直线的参数 (b, c) 及平面的参数 (A, B, C) .

5 算例

算例 1 考虑图 3 所示的正轴测投影线图.

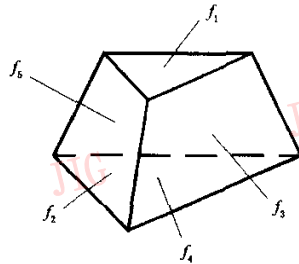


图 3 输入的正轴测投影线图

该线图所表示的平面立体的平面结构 G 和空间结构 S 分别为

$$G = (J, U, E, H)$$

$$J = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

$$U = \{(\rho_1, \sin(\theta_1), \cos(\theta_1)), (\rho_2, \sin(\theta_2), \cos(\theta_2))\}$$

...

$$(\rho_9, \sin(\theta_9), \cos(\theta_9))\}$$

$$E = \{(1, 3)(3, 4)(1, 4)(1, 2)(1, 6)(2, 6)(2, 5)$$

$$(3, 5)(2, 3)(4, 7)(4, 9)(7, 9)(5, 7)(5, 8)$$

$$(7, 8)(6, 9)(6, 8)(8, 9)\}$$

$$H = \{(5, 9)\}$$

$$S = (L, F, T, R_1, R_2 \dots)$$

$$L = \{(\rho_1, \theta_1, a_1, b_1)(\rho_2, \theta_2, a_2, b_2) \dots (\rho_9, \theta_9, a_9, b_9)\}$$

$$F = \{(A_1, B_1, C_1)(A_2, B_2, C_2) \dots (A_9, B_9, C_9)\}$$

$$R_1 = E$$

$$T = \{(5, 9)\}$$

$$R_2 = \{(M_1, f_1)(M_2, f_1)(M_3, f_1)(M_3, f_2)(M_4, f_2)$$

$$(M_5, f_2)(M_7, f_2)(M_2, f_3)(M_5, f_3)(M_6, f_3)$$

$$(M_8, f_3)(M_7, f_4)(M_8, f_4)(M_9, f_4)(M_4, f_5)$$

$$(M_6, f_5)(M_9, f_5)\}$$

该正轴测投影线图自由度为 4,可以任选其中的 4 个未知量(或利用度量关系求解),如选取 $C_3 = -10, A_4 = 0, B_4 = 0, C_4 = 1$,所得结果如图 4 所示.

平面立体上空间直线及平面的参数见表 1 及表 2.

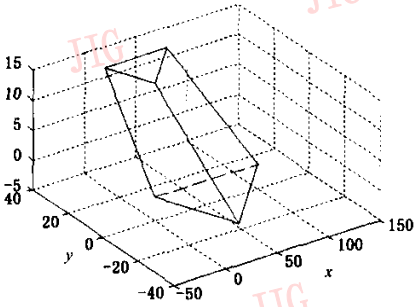


图 4 输出的平面立体

表 1 空间直线的参数

直线	ρ	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	b	c
1	40	1	0	$7.604e-016$	-11.467
2	5.252	0.919	-0.394	$8.686e-009$	-11.467
3	42.426	0.707	0.707	$-2.787e-007$	-11.467
4	0	0.447	-0.894	-0.249	1
5	34.213	-0.152	0.988	-0.234	-4.945
6	89.443	0.447	0.894	-0.249	-11.467
7	0	0.707	0.707	$-2.073e-007$	1
8	39.392	-0.919	0.394	$-3.217e-014$	1
9	0	1	0	$9.285e-016$	1

表 2 平面立体面的参数

面	A	B	C
1	$3.5595e-007$	$-2.0755e-007$	-11.467
2	-0.20778	-0.20778	1
3	0.11	-0.25667	10
4	0	0	1
5	$-2.1074e-009$	-0.31167	1

算例 2 输入的正轴测投影线图如图 5 所示，输出的平面立体解释结果如图 6 所示。

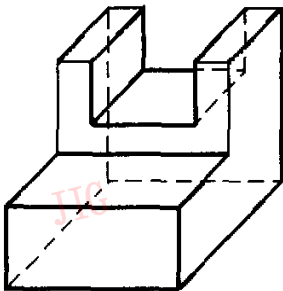


图 5 输入的正轴测投影线图

算例 2 表示的平面立体由 30 条直线和 12 个平面组成，共 96 个参数，由于篇幅关系，不再列出平面上空间直线及平面的参数。

在计算实验中，依据输入的正轴测投影线图中直线的参数，利用本文的方法计算得到了平面立体上直线和平面的坐标。为检验所提出方法的正确性

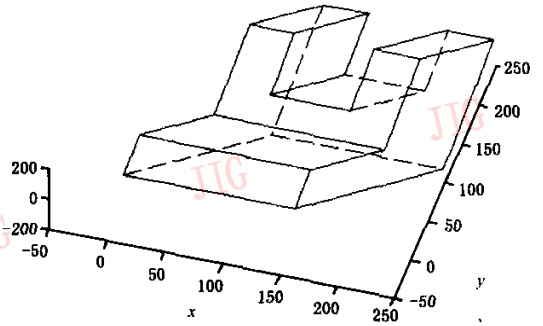


图 6 输出的平面立体

和有效性，根据计算得到平面立体上直线和平面的坐标计算了平面立体上各顶点的空间坐标，把各顶点投影到投影面上，两个算例中所得的投影点坐标与原正轴测投影线图上的对应点的坐标基本一致，证明了计算得到的平面立体解释结果是正确的。

6 结 论

考虑画出隐藏线的正轴测投影线图，提出了一种基于直线解释单幅正轴测投影线图的方法，同时给出了一种新的空间直线坐标表示法，证明了解释平面立体正轴测投影线图至少有 4 个自由度。根据正轴测投影线图中隐含的直线与平面之间的从属关系建立了约束方程，根据约束方程得到一个线性系统，通过求解该线性系统得到平面立体上直线和平面的参数，即得到平面立体的三维信息。大量的算例证明该算法是可行的和稳定的。

参 考 文 献

- 1 鲁字明, 储翔, 高满屯. 立体线图的标记研究[J]. 西北工业大学学报, 2002, 20(4): 677~679.
- 2 Cooper M C. The interpretation of line drawings with contrast failure and shadows[J]. International Journal Computer Vision, 2001, 43(2): 75~97.
- 3 Sugihara K. Machine Interpretation of Line Drawing [M]. Massachusetts, USA: MIT Press, 1986.
- 4 Shpitalni M, Lipson H. Identification of faces in a 2D line drawing projection of a wire frame object[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, 18(10): 1000~1012.
- 5 Liu J, Lee Y T, Cham W. Identifying faces in a 2D line drawing representing a manifold object[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(12): 1579~1593.
- 6 Lipson H, Shpitalni M. Optimization-based reconstruction of a

- 3D object from a single freehand line drawing[J]. Computer-Aided Design, 1996, 28(8): 651~663.
- 7 Varley P A C, Martin R R. A system for constructing boundary presentation solid models from a two-dimensional sketch[A]. In: Proceedings Geometric Modeling and Processing 2000. Theory and Applications[C], Hong Kong, China, 2000:13~32
- 8 Grimstead I J, Martin R R. Creating solid models from single 2D sketches[A]. In: Proceedings of the Third ACM Symposium on Solid Modeling and Applications [C], Salt Lake City, Utah USA, 1995:323~337.
- 9 曲仕茹, 高满屯. 基于直线解释正轴测投影图. 西北工业大学学报[J], 1997, 15(3): 343~347.
- 10 曲仕茹, 高满屯. 利用直线解释透视图的理论和方法. 模式识别与人工智能[J], 1995, 8(4): 303~312.



高满屯 1962年生。教授。主要从事计算机视觉、计算机图形图像处理和分析研究。已公开发表论文 80 余篇, 出版学术专著 1 部。



陈国定 1957年生。教授、博士生导师。主要从事润滑密封技术、机械动力学、热分析和电子轴承的研究。已公开发表学术论文 90 余篇。



储 璿 1967年生。副教授。现为西北工业大学博士研究生。主要从事计算机视觉、计算机图形图像处理和分析研究。已公开发表论文 10 余篇。
E-mail: chujun99602@hotmail.com